Fonction Linéaire Et Fonction Affine

3ASC

Mathématiques

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
لتكوين المهني
Académie Régionale d'Éducation et de Formation
Région de Marrakech - Safi

I_ Fonction linéaire :

1/ Définition :

Soit a un nombre réel donné.
Toute relation f qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel ax s'appelle fonction linéaire de coefficient a, telle que : $f : \to ax$.
On dit que : ax *est l'image de* x *par la fonction* f et on écrit : $f(x) = ax$.

*/ Remarque : Une fonction linéaire peut-être noté : f *ou* g *ou* h *ou* l .....

2/ Exemples et applications :

On considère la fonction linéaire f telle que :
x un nombre réel et $f(x) = 2x$.

*/ Le coefficient de f *est* 2.

*/ Calculons l'image du nombre -2 par la fonction f :

On a : $f(-2) = 2\times(-2)$
$= -4$

Donc : l'image de -2 par la fonction f est : -4.

*/ Calculons $f\left(\sqrt{3}\right)$:

On a : $f\left(\sqrt{3}\right) = 2\times\sqrt{3}$

D'où : $\boxed{f\left(\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}}$.

*/ Calculons le nombre qui a pour image -4 par la fonction f :

On considère x le nombre qui a pour image -4 par la fonction f.

Donc : $f(x) = -4$

Et puisque : $f(x) = 2x$, alors : $2x = -4$

Signifie que : $x = \dfrac{-4}{2}$

$x = -2$

D'où : le nombre qui a pour image -4 par la fonction f est -2.

3/ Propriété du coefficient d'une fonction linéaire :

Soit a un nombre réel donné et x un nombre réel quelconque.

Si f est une fonction linéaire de coefficient a, alors : $a = \dfrac{f(x)}{x}$ et $x \neq 0$

***/ Exercice d'application :**

Soit g une fonction linéaire telle que : $g(2) = -4$.

Définir g (*ou montrer que* $g(x) = -2x$ *ou donner* $g(x)$ *en fonction de* x).

***/ Solution :**

Puisque g est une fonction linéaire, alors : $g(x) = ax$, avec a et x deux nombres réels.

*/ Déterminons a :

On a : $a = \dfrac{g(x)}{x}$, et $x \neq 0$.

Et puisque : $g(2) = -4$, alors : $a = \dfrac{g(2)}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$.

D'où : $\boxed{g(x) = -2x}$.

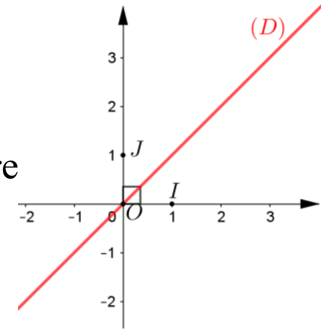
4/ Représentation graphique d'une fonction linéaire :

a)_ Définition :

Soient a un nombre réel donné, et x et y deux nombres réels quelconques.
Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère et qui a pour équation réduite : $y = ax$.

a est le coefficient directeur de cette droite.

b)_ Exemple :



Dans la figure ci-contre :

La droite (D) est la représentation graphique d'une fonction linéaire

c)_ Propriété :

Le plan muni d'un repère orthonormé.

Soient A un point et (D) la représentation graphique d'une fonction linéaire f.

$A \in (D)$ est équivalent à $A(x_A ; f(x_A))$ et $y_A = ax_A$

*/ Exercice d'application 1 :

On considère le plan muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction linéaire définie par : $f(x) = -2x$ et (D) sa représentation graphique.

Est-ce que les points $A(-1;5)$ *et* $B(3;-6)$ appartiennent à (D) ?

*/ Solution :

*/ Cherchons si $A \in (D)$:

On a : $\begin{cases} y_A = 5 \\ -2x_A = -2 \times 5 = -10 \end{cases}$

Donc : $y_A \neq -2x_A$.

D'où : $\boxed{A \notin (D)}$.

*/ Cherchons si $B \in (D)$:

On a : $\begin{cases} y_B = -6 \\ -2 \times x_B = -2 \times 3 = -6 \end{cases}$.

Donc : $y_B = -2 \times x_B$.

D'où : $\boxed{B \in (D)}$.

*/ Exercice d'application 2 :

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Soit g une fonction linéaire définie par : $g(x) = -\frac{1}{2}x$.

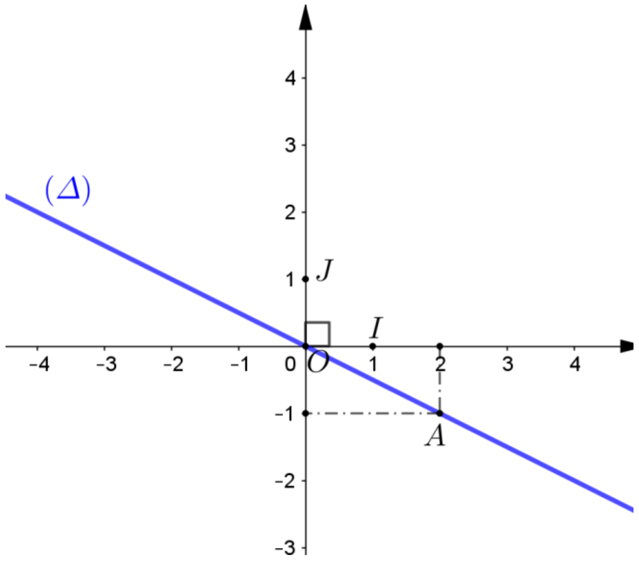
Tracer (Δ) la représentation graphique de la fonction g.

*/ Solution :

On considère le tableau de valeurs de la fonction g suivant :

x	0	2
$g(x)$	0	-1
$M(x; g(x))$	$O(0;0)$	$A(2;-1)$

Donc : $(\Delta) = (OA)$



II_ Fonction affine :

1/ Définition :

Soient a et b deux nombres réels donnés.

Toute relation f qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel $ax+b$ s'appelle fonction affine de coefficient a, telle que : $f : \to ax+b$.

On dit que : $ax+b$ *est l'image de x par la fonction f* et on écrit : $f(x)=ax+b$.

*/ Remarque : Une fonction affine peut-être noté : f *ou* g *ou* h *ou* l .....

2/ Exemples et applications :

On considère la fonction affine f telle que :

x un nombre réel et $f(x)=\dfrac{-1}{2}x+3$.

*/ Le coefficient de la fonction f est $\dfrac{-1}{2}$.

*/ Calculons l'image du nombre -2 par la fonction f :

On a :
$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{-1}{2}\times(-2)+3 \\ &= 1+3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Donc : l'image de -2 par la fonction f est : 4.

*/ Calculons $f\left(\dfrac{2}{5}\right)$:

On a :
$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{5}\right) &= \frac{-1}{2}\times\frac{2}{5}+3 \\ &= \frac{-2}{10}+3 \\ &= \frac{-1}{5}+\frac{15}{5} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{f\left(\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{14}{5}}$

*/ Calculons le nombre qui a pour image $\dfrac{2}{3}$ par la fonction f :

On considère x le nombre qui a pour image $\dfrac{2}{3}$ par la fonction f.

Donc : $f(x)=\frac{2}{3}$

Et puisque : $f(x)=\frac{-1}{2}x+3$, alors : $\frac{-1}{2}x+3=\frac{2}{3}$

Signifie que :

$$\frac{-1}{2}x=\frac{2}{3}-3$$

$$\frac{-1}{2}x=\frac{2-9}{3}$$

$$\frac{-1}{2}x=\frac{-7}{3}$$

$$x=\frac{-7}{3}\times\frac{2}{-1}$$

$$x=\frac{14}{3}$$

D'où : le nombre qui a pour image -4 par la fonction f est $\frac{14}{3}$.

3/ Propriété du coefficient d'une fonction affine :

Soit a un nombre réel donné et x et x' deux nombres réels quelconques.
Si f est une fonction linéaire de coefficient a, alors :

$$a=\frac{f(x)-f(x')}{x-x'} \quad et \quad x\neq x'$$

*/ Exercice d'application :

Soit g une fonction affine telle que : $g(-3)=9$ et $g(0)=-6$.

Définir g (*ou montrer que* $g(x)=-5x-6$ *ou donner* $g(x)$ *en fonction de* x).

*/ Solution :

Puisque g est une fonction affine, alors : $g(x)=ax+b$, avec a, b *et* x des nombres réels.

*/ Déterminons a :

On a : $a=\frac{g(x)-g(x')}{x-x'}$, *et* $x\neq x'$.

Et puisque : $g(-3)=9$ *et* $g(0)=-6$, alors : $a=\frac{g(-3)-g(0)}{-3-0}=\frac{9+6}{-3}=\frac{15}{-3}=-5$

D'où : $g(x)=-5x+b$.

*/ Déterminons b :

On a : $g(-3)=9$ signifie que : $-5\times(-3)+b= 9$

$15+b= 9$

$b=9-15$

$b=-6$

D'où : $\boxed{g(x)=-5x-6}$.

4/ Représentation graphique d'une fonction affine :

a)_ Définition :

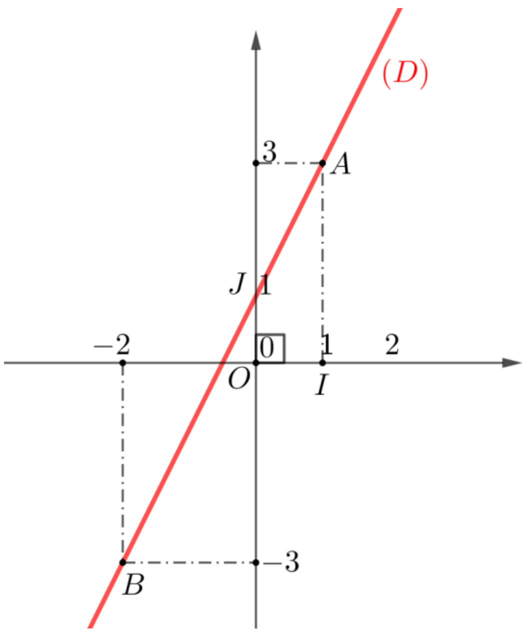
Soient a et b un nombre réel donnés, et x et y deux nombres réels.
Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui a pour équation réduite : $y=ax+b$.
a est le coefficient directeur de cette droite et b l'ordonnée à l'origine.

b)_ Exemple :

Soit f une fonction affine définie par : x un nombre réel tel que : $f(x)=2x+1$.
Traçons (D) la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;I;J)$.

On considère le tableau de valeurs de la fonction g suivant :

x	1	-2
$f(x)$	3	-3
$M(x;f(x))$	$A(1;3)$	$B(-2;-3)$



Donc : $(D)=(AB)$

*/ Exercice d'application 1 :

Soit g une fonction affine telle que :

sa représentation graphique (Δ) passe par les points $A(1;2)$ *et* $B(-1;-4)$.

1/ Montrer que $g(x)=3x-1$.

2/ Déterminer les coordonnées de E point d'intersection de (Δ) et l'axe des abscisses.

3/ Déterminer les coordonnées de F point d'intersection de (Δ) et l'axe des ordonnées.

*/ Solution :

1/ Montrons que $g(x)=3x-1$:

On a : g est une fonction affine.

Donc $g(x)$ est de la forme : $g(x)=ax+b$.

*/ Déterminons a :

On a : $a=\dfrac{g(x)-g(x')}{x-x'}$ *et* $x\neq x'$.

Et puisque la représentation graphique de la fonction g passe par les points :

$A(1;2)$ *et* $b(-1;-4)$, alors : $g(1)=2$ *et* $g(-1)=-4$.

Donc : $a=\dfrac{g(1)-g(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{2-(-4)}{1+1}=\dfrac{2+4}{2}=\dfrac{6}{2}=3$.

D'où : $g(x)=3x+b$.

*/ Déterminons b :

$g(1)=2$ signifie que : $3\times1+b=2$

$3+b=2$

$b=2-3$

$b=-1$

D'où : $\boxed{g(x)=3x-1}$.

2/ Déterminons les coordonnées du point E :

On a : E point d'intersection de (Δ) et l'axe des abscisses, signifie que :

$\begin{cases} E\in(\Delta) \\ E\in(OI) \end{cases}$ C'est-à-dire : $\begin{cases} y_E=3x_E-1 \\ y_E=0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 0=3x_E-1 \\ y_E=0 \end{cases}$ signifie que : $\begin{cases} -3x_E=-1 \\ y_E=0 \end{cases}$

Par suite :
$$\begin{cases} x_E = \dfrac{-1}{-3} \\ y_E = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_E = \dfrac{1}{3} \\ y_E = 0 \end{cases}$$

D'où : $\boxed{E\left(\dfrac{1}{3};0\right)}$

3/ Déterminons les coordonnées du point F :

On a : F point d'intersection de (Δ) et l'axe des ordonnées, signifie que :

$$\begin{cases} F \in (OJ) \\ F \in (\Delta) \end{cases} \quad \text{C'est-à-dire :} \quad \begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = 3x_F - 1 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = 3\times 0 - 1 \end{cases}$ signifie que : $\begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = 0 - 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = -1 \end{cases}$$

D'où : $\boxed{F(0;-1)}$

*/ Exercice d'application 2 :

Soient f une fonction linéaire, sa representation graphique (D) et g une fonction affine, sa représentation graphique (Δ), telles que : $f(x) = -4x$ *et* $g(x) = 2x+2$.

Déterminer les coordonnées de E, point d'intersection de (D) *et* (Δ).

*/ Solution :

Puisque E est le point d'intersection de (D) *et* (Δ), alors : $f(x_E) = g(x_E)$.

C'est-à-dire : $-4x_E = 2x_E + 2$ signifie que : $-4x_E - 2x_E = 2$

$$-6x_E = 2$$

$$x_E = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

D'autre part : $f\left(\dfrac{-1}{3}\right) = -4\times\dfrac{-1}{3} = \dfrac{4}{3}$

D'où : $\boxed{E\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{4}{3}\right)}$.