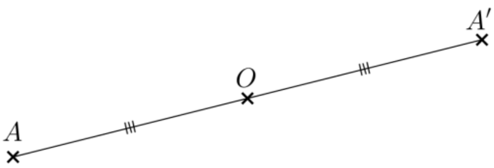
	La symétrie centrale	
	1ASC	
	Mathématiques	

I_ Le symétrique d'un point :

1/ Exemple :

Soient A et O deux points distincts.

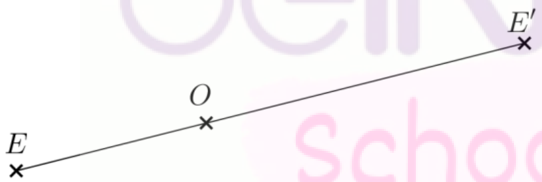
Traçons le A' tel que O soit le milieu du segment $[AA']$.



On appelle A' : Le symétrique du point A par rapport au point O.

2/ Contre-exemple :

On considère la figure suivante :



E' n'est pas le symétrique du point E par rapport au point O , car d'après la figure O n'est pas le milieu du segment $[EE']$.

3/ Définition :

Soient A et O deux points distincts.
Dire que le point A' est le symétrique du point A par rapport au point O
Signifie que O est le milieu du segment $[AA']$.

*/ Remarques :

-*- O est appelé centre de symétrie.

-*- Si A' est le symétrique du point A par rapport à O, alors A est aussi le symétrique du point A' par rapport à O et on dit que : A et A' sont symétriques par rapport à O.

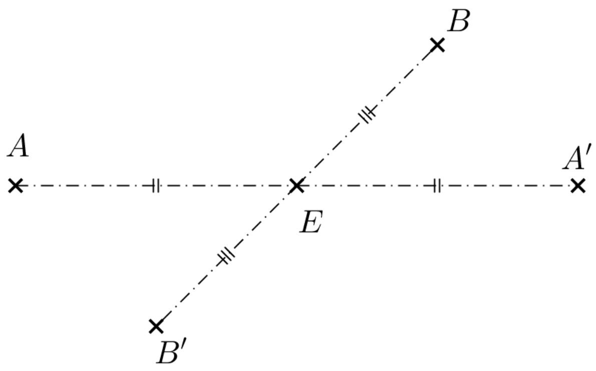
II_ Propriétés :

1/ Conservation de la distance :

a)_ Exemple :

Soient A , B et E trois points non alignés tels que : $AB = 5\,cm$.

A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport à E.



En utilisant la règle on remarque que : $A'B' = 5\,cm$

On dit que : la symétrie centrale conserve la distance entre les points.

b)_ Propriété :

Si A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport à un point , alors : $AB = A'B'$.

*/ Application

Soit ABC est un triangle tel que $BC = 5\,cm$.

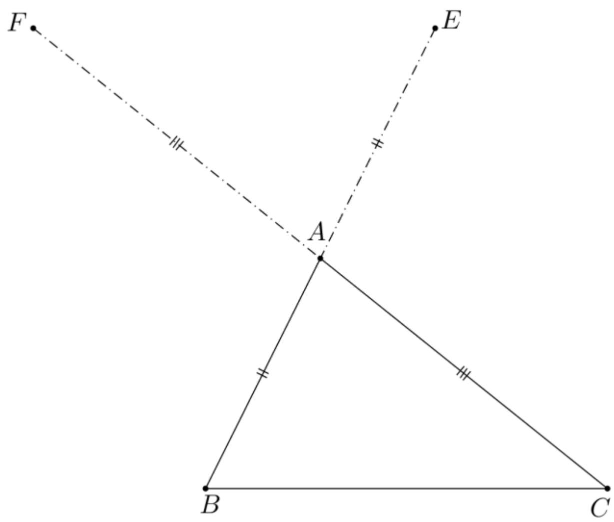
E et F sont les symétriques respectifs des points B et C par rapport à A.

1/ Tracer une figure.

2/ Calculer EF en justifiant la réponse.

Solution :

1/ La figure :



2/ Calculons EF :

On a :

*/ Le symétrique de B par rapport à A c'est E.

*/ Le symétrique de C par rapport à A c'est F.

Doc : $EF = BC$.

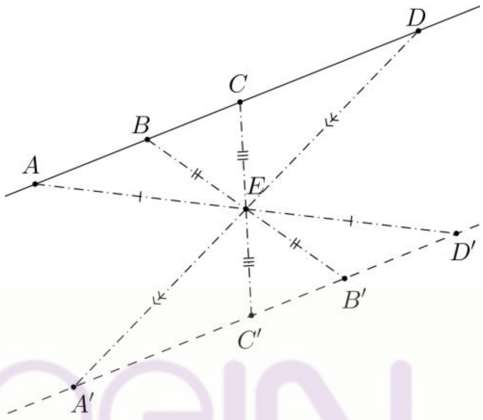
Et puisque $BC = 5\,cm$, alors : $\boxed{EF = 5\,cm}$.

2/ Conservation d'alignement de points :

a)_ Exemple :

Soient A ,B ,C et D quatre points alignés, et soit E un point non aligné avec les points A ,B ,C et D.

A' ,B' ,C' et D' sont les symétriques respectifs des points A ,B ,C et D par rapport à E.



On remarque que les points A' ,B' ,C' et D' sont aussi des points alignés.

On dit que la symétrie centrale conserve l'alignement des points.

b)_ Propriété :

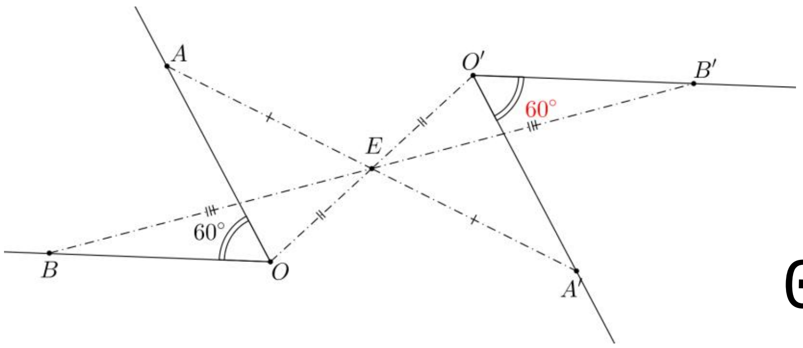
Les symétriques des points alignés, par rapport à un point sont aussi des points alignés.

2/ Conservation des mesures d'angles :

a)_ Exemple :

Soit $A\hat{O}B$ un angle tel que : $A\hat{O}B = 60^\circ$ et soit E un point tel que : $E \notin A\hat{O}B$.

A' , O' et B' sont les symétriques respectifs des points A ,O et B par rapport à E.



0000003

En utilisant le rapporteur on remarque que : $A'\hat{O}'B' = 60^{\circ}$.

On dit que la symétrie centrale conserve la mesure d'angles.

b)_ Propriété :

Si A', O' et B' sont les symétriques respectifs des points A, O et B par rapport à un point , alors : $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$.

*/ Application

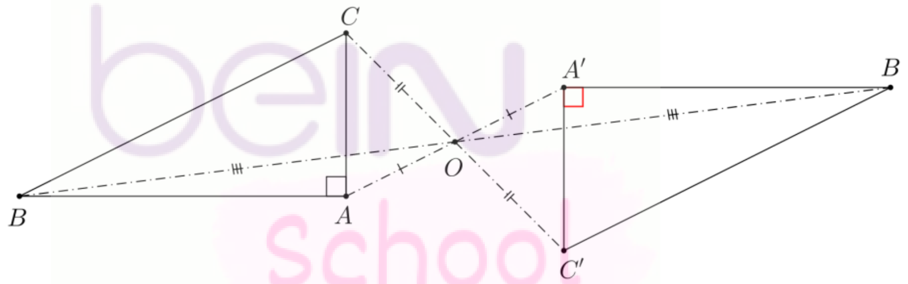
Soit ABC un triangle rectangle en A et soit O un point.
A', B' et C' sont les symétriques respectifs des points A, B et C par rapport à O

1/ Tracer une figure.

2/ Montrer que le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A'.

Solution :

1/ La figure :



2/ Montrons que le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A'.

On sait que :

B' est le symétrique de B par rapport à O.
A' est le symétrique de A par rapport à O.
C' est le symétrique de C par rapport à O.

Donc : $B'\hat{A}'C' = B\hat{A}C$

Est puisque $B\hat{A}C$ est un angle droit , alors $B'\hat{A}'C'$ est aussi un angle droit.
D'où : le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A'.

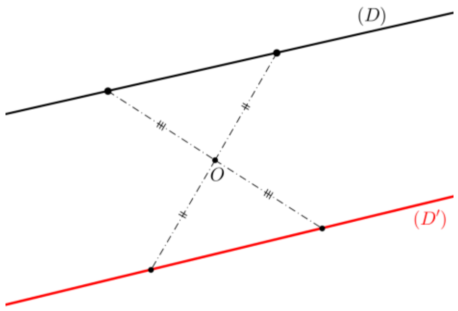
III_ Les symétriques de quelques figures :

1/ Le symétrique d'une droite :

Soient (D) une droite et O un point.

Traçons (D') le symétrique de (D) par rapport à O.

a)_ 1er cas : Supposons que : $O \notin (D)$.



On remarque que : les droites (D) et (D') sont strictement parallèles.

On dit que : (Propriété 1)

> Le symétrique d'une droite (D) par rapport à un point O tel que :
> $O \notin (D)$, est la droite (D') strictement parallèle à (D)

b)_ 2ème cas : Supposons que : $O \in (D)$.

On remarque que : les droites (D) et (D') sont confondues.

On écrit : $(D) = (D')$

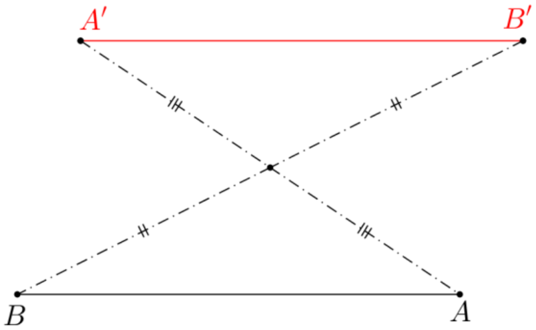
On dit que : (Propriété 2)

> Le symétrique d'une droite (D) par rapport à un point O tel que :
> $O \in (D)$, est la droite (D) elle-même.

2/ Le symétrique d'un segment :

Soient $[AB]$ un segment et O un point tel que $O \notin [AB]$.

Traçons le segment $[A'B']$ le symétrique du segment $[AB]$ par rapport à O.



Montrons que les segments $[AB]$ et $[A'B']$ sont isométriques (égaux):

On sait que A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport à O.

Donc : $A'B' = AB$

D'où les segments $[AB]$ et $[A'B']$ sont isométriques (égaux).

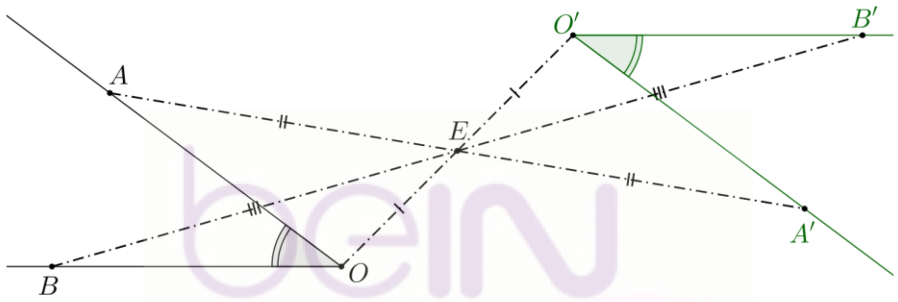
On dit que : (Propriété 3)

Le symétrique d'un segment par rapport à un point est un segment qui lui est isométrique (égal).

3/ Le symétrique d'un angle :

Soient $A\hat{O}B$ un angle et E un point.

Traçons l'angle $A'\hat{O}'B'$ le symétrique de l'angle $A\hat{O}B$ par rapport à E.



Montrons que les angles $A\hat{O}B$ et $A'\hat{O}'B'$ sont isométriques (égaux) :

On sait que A', O' et B' sont les symétriques respectifs des points A , O et B par rapport à E.

Donc : $A'\hat{O}'B' = A\hat{O}B$

D'où les angles $A\hat{O}B$ et $A'\hat{O}'B'$ sont isométriques (égaux).

On dit que : (Propriété 4)

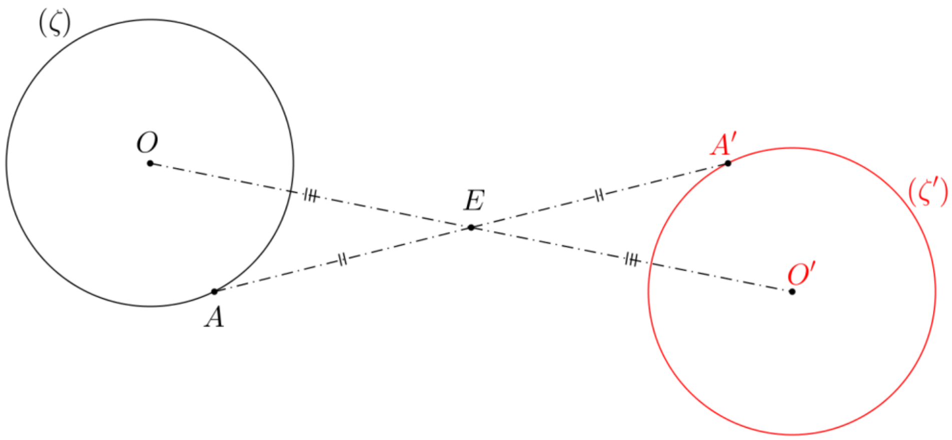
Le symétrique d'un angle par rapport à un point est un angle qui lui est isométrique (égal).

4/ Le symétrique d'un cercle :

Soient (ζ) un cercle de centre O et de rayon r et E un point.

Traçons le cercle (ζ') le symétrique du cercle (ζ) par rapport à E.

0000006



Montrons que les cercles (ζ) et (ζ') ont même rayon r :

On sait que O' et A' sont les symétriques respectifs des points O et A par rapport à O.

Donc : $O'A' = OA$.

Et puisque $OA = r$, alors $O'A' = r$

D'où les cercles (ζ) et (ζ') ont même rayon r.

On dit que : (Propriété 5)

> Le symétrique d'un cercle (ζ) de centre O et de rayon r par rapport à un point E est le cercle (ζ') de centre O' (le symétrique de O par rapport à E) et de même rayon r.

Remarque :

Pour tracer le symétrique d'un cercle par rapport à un point, il suffit de tracer le symétrique du centre de ce cercle et de garder le même rayon.

IV_ Le centre de symétrie d'une figure :

1/ Définition :

> Soient (F) une figure et O un point.
> On appelle O centre de symétrie de (F) lorsque le symétrique de (F) par rapport à O est (F).

2/ Exemples :

a/ Le centre de symétrie d'une droite est un point qui lui appartient.

b/ Le centre de symétrie d'un segment est son milieu.

c/ Le centre de symétrie d'un cercle est son centre.