Maths facile Prof : abdelmalek	**Vecteurs et translation** 3ASC Mathématiques	Prof abdelmalek EL atmani

I_ Vecteurs :

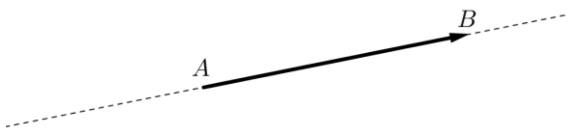
1/ Vecteur non nul :

a)_ Définition :

Chaque deux points différents A et B déterminent un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ d'origine A et d'extrémité B.

b)_ Exemple et caractéristiques :

*/ Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul
(Voir la figure ci-contre)



*/ Chaque vecteur possède trois caractéristiques : La direction, le sens et la norme.

Dans l'exemple du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ci-dessus on a :

1/ La direction : c'est La droite (AB).

2/ Le sens : c'est de A vers B.

3/ La norme : c'est la distance AB.

2/ Vecteur nul :

a)_ Définition :

Chaque point A détermine un vecteur nul $\overrightarrow{AA}$ noté $\vec{O}$
On écrit : $\overrightarrow{AA} = \vec{O}$.

b)_ Remarques :

*/ La norme d'un vecteur nul est zéro, mais la direction et le sens ne sont pas définis.

*/ Si $\overrightarrow{AB} = \vec{O}$, alors : $A = B$. (c'est-à-dire A et B sont deux points confondus)

3/ Egalité de deux vecteurs :

a)_ Propriété 1 :

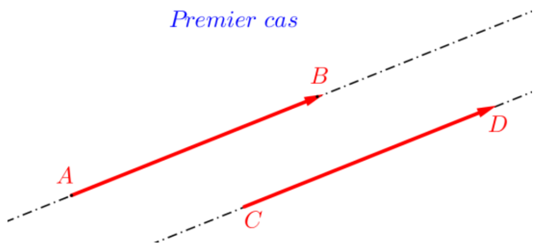
Dire que deux vecteurs sont égaux signifie qu'ils ont : la même direction le même sens et la même norme.

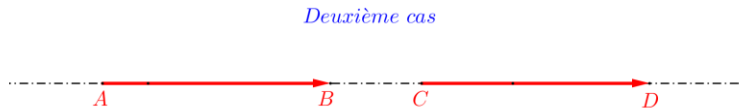
0000001

*/ Remarque importante : même direction signifie que leurs directions sont :
Soit deux droites strictement parallèles, soit deux droites confondues.

*/ Exemple :

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

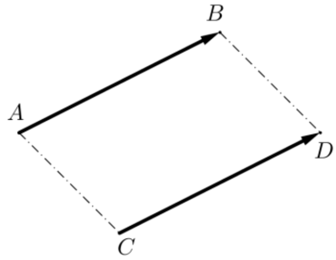


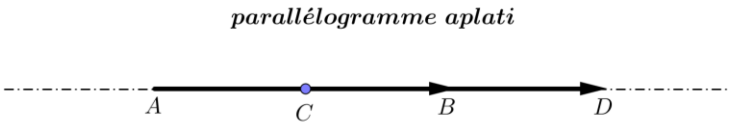


b)_ Propriété 2 :

Soit $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalent à $ABDC$ est un parallélogramme.

*/ Exemples :





*/ Exercice d'application :

Soit ABC un triangle.

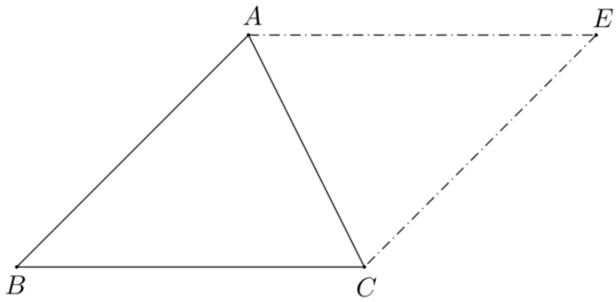
1/ Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.

2/ Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$.

*/ Solution :

1/ La figure :

On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ signifie que $AECB$ est un parallélogramme.



0000002

2/ Montrons que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}$.

On sait que $AECB$ est un parallélogramme.

C'est-à-dire que : $ABCE$ un parallélogramme.

D'où : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}$.

4/ L'opposé d'un vecteur non nul :

Propriété :

L'opposé d'un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $-\overrightarrow{AB}$, noté : $\overrightarrow{BA}$.

On écrit : $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

5/ Relation de Chasles :

a)_ Propriété :

Si A, B et C sont trois points distincts, alors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

b)_ Exemples :

Simplifions les écritures suivantes :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE} \quad ; \quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC}$$

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AA}\\ &= \vec{O}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE} &= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{BE}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\\ &= \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

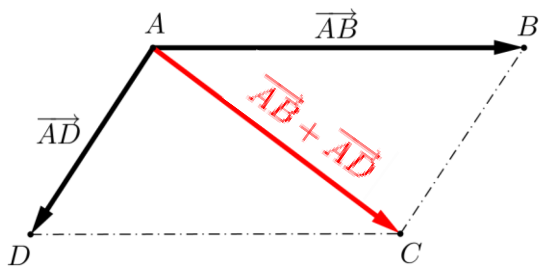
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}\right)\\ &= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}\\ &= \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

6/ Somme de deux vecteurs :

a)_ Propriété :

$ABCD$ est un parallélogramme équivalent à : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b)_ Exemples :



On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Tel que : $ABCD$ est un parallélogramme.

*/ Exercice d'application :

Soit ABC un triangle.

1/ a)_ Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$.

b)_ Construire les points M et N les symétriques respectifs de A et C par rapport à B.

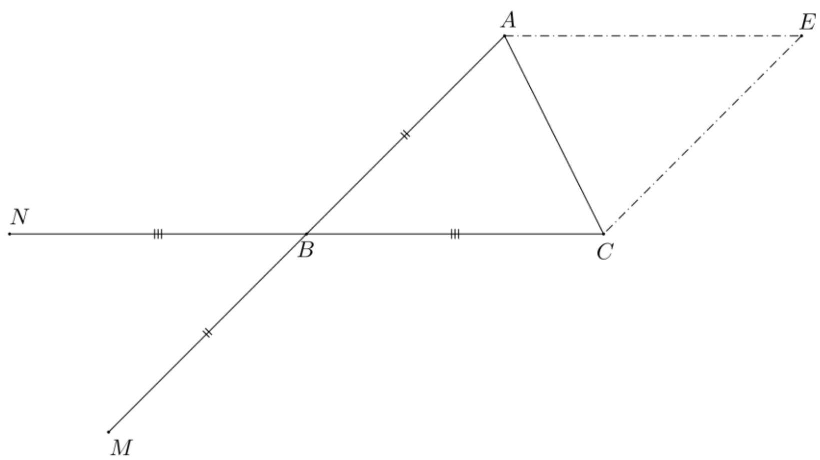
2/ Montrer que : $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM}$.

*/ Solution :

1/ La figure :

a)_ On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$, signifie que $AECB$ est un parallélogramme.

b)_ On a : M et N les symétriques respectifs de A et C par rapport à B, signifie que B est le milieu des segments $[AM]$ et $[CN]$.



2/ Montrons que : $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM}$.

Pour cela on va montrer que $NACM$ est un parallélogramme.

On sait que $[AM]$ et $[CN]$ ont même milieu B.

Donc $NACM$ est un parallélogramme. D'où : $\boxed{\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM}}$.

0000004

Prof abdelmalek EL atmani

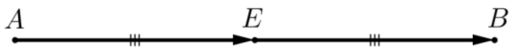
7/ Vecteur et milieu d'un segment :

a)_ Propriété :

Soient $[AB]$ un segment et E un point.
E milieu du segment $[AB]$ est équivalent à $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$.

b)_ Exemples :

Soient $[AB]$ un segment et E son milieu.



On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$.

***/ Exercice d'application :**

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Soient E et F deux points tels que : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$.

1/ Construire la figure.

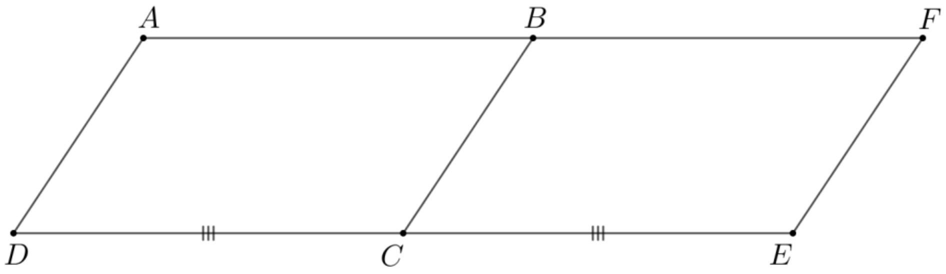
2/ Montrer que : B est le milieu du segment $[AF]$.

***/ Solution :**

1/ La figure :

On a : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$ signifie que : C est le milieu du segment $[DE]$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$ signifie que : $BCEF$ est un parallélogramme.



2/ Montrons que B est le milieu du segment $[AF]$:

On sait que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$.

Et puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. (1)

Et on sait que $BCEF$ est un parallélogramme.

Donc : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BF}$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF}$.

D'où : B est le milieu du segment $[AF]$.

8/ Produit d'un vecteur par un nombre réel :

a)_ Définition :

Soient $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul E un point et k un nombre réel.
On appelle le vecteur $\overrightarrow{AE}$ le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le réel k
et on écrit : $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}$ tel que :

Si $k>0$, alors : $\begin{cases} E\in(AB) \\ \overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ ont même sens} \\ AE=k\times AB \end{cases}$

Si $k<0$, alors : $\begin{cases} E\in(AB) \\ \overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ ont des sens opposés} \\ AE=-k\times AB \end{cases}$

Si $k=0$, alors : E et B sont confondus .

b)_ Exemple :

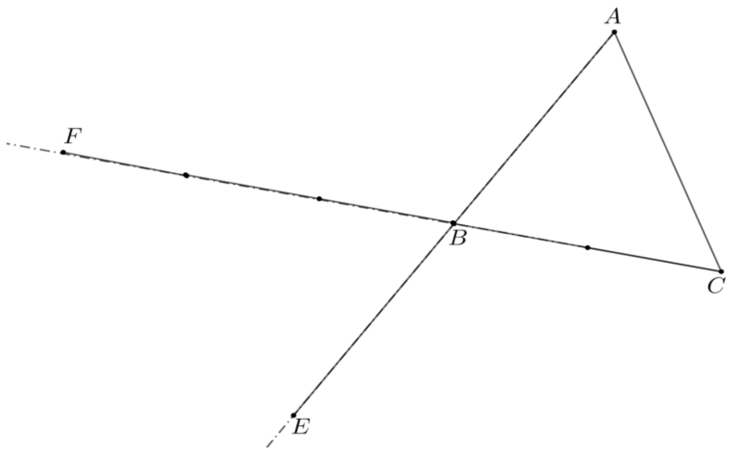
soit ABC un triangle.

Construisons les points E *et* F tels que : $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}$.

On a :

$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$ et $2>0$, donc : $\begin{cases} E\in(AB) \\ \overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ ont même sens} \\ AE=2\times AB \end{cases}$

$\overrightarrow{BF}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\frac{-3}{2}<0$, donc : $\begin{cases} F\in(BC) \\ \overrightarrow{BF} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ ont des sens opposés} \\ BF=-\left(-\frac{3}{2}\right)BC=\frac{3}{2}BC \end{cases}$



9/ Propriété des points alignés et des droites parallèles :

Soient A, B, C et D des points distincts et k un nombre réel non nul.

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ est équivalent à A, B et C sont des points alignés(*on dit aussi* : $B \in (AC)$)

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ est équivalent à $(AB)//(CD)$.

*/ Exercice d'application (1) :

Soient $ABCD$ un parallélogramme et E un point tel que : $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Montrer que les points D, C et E sont alignés.

*/ Solution :

Montrons que les points D, C et E sont alignés.

On sait que : $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Et puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Donc : $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

D'où : Les points D, C et E sont alignés.

*/ Exercice d'application (2) :

Soient ABC un triangle, et E et F deux points tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{-7}{5}\overrightarrow{BC}$ et C le milieu du segment $[BF]$.

Montrer que : $(AE) // (CF)$.

*/ Solution :

Montrons que $(AE) // (CF)$.

On sait que : $\overrightarrow{AE} = \frac{-7}{5}\overrightarrow{BC}$.

Et puisque C est le milieu du segment $[BF]$, alors : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CF}$.

Donc : $\overrightarrow{AE} = \frac{-7}{5}\overrightarrow{CF}$.

D'où : $(AE) // (CF)$.

I_ La translation :

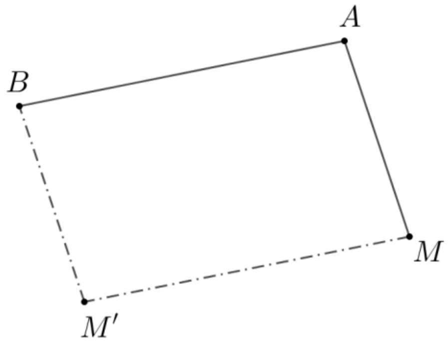
1/ L'image d'un point par une translation :

a)_ Exemple :

Soient A, B et M trois point non alignés.

Construisons le point M' tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$.

On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MM'}$ signifie que : $ABM'M$ est un parallélogramme.



On appelle M' l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

(ou la translation qui transforme A en B)

b)_ Définition :

Soient $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et M un point.
On appelle M' l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
(ou qui transforme A en B) tel que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MM'}$, signifie que :
$ABM'M$ est un parallélogramme.

*/ Exercice d'application :

Soit ABC un triangle.

On considère les points E et F les images respectives des points A et C par la translation qui transforme B en C

1/ Tracer la figure.

2/ Montrer que $AEFC$ est un parallélogramme.

*/ Solution :

1/ La figure :

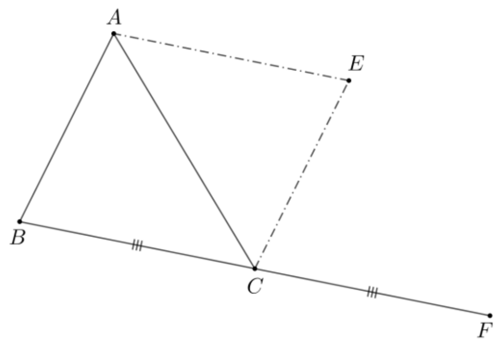
On sait que :

E est l'image du point A par la translation qui transforme B en C

Donc : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}$ signifie que : $BCEA$ est un parallélogramme.

F est l'image du point C par la translation qui transforme B en C

Donc : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CF}$ signifie que : C est le milieu du segment $[BF]$.



2/ Montrons que $AEFC$ est un parallélogramme :

On sait que : $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CF} \end{cases}$

Donc : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF}$

D'où : $AEFC$ est un parallélogramme.

2/ Propriété caractéristique :

Si A' et B' sont les images respectives des points A et B par une translation alors : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

*/ Exercice d'application :

Soit ABC un triangle.

On considère la translation t qui transforme B en C.

Soient E et F les images respectives des points A et C par la translation t.

Montrer que $AEFC$ est un parallélogramme.

*/ Solution :

Montrons que $AEFC$ est un parallélogramme :

Puisque : E et F sont les images respectives des points A et C par la translation t.

Alors : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}$.

Donc : $EFCA$ est un parallélogramme.

C'est-à-dire : $AEFC$ est un parallélogramme.

3/ L'image de quelques figures par une translation :

L'image d'un segment par une translation est un segment de même longueur.
L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.
L'image d'un angle par une translation est un angle de même mesure.

*/ Exercice d'application :

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 4\,cm$ et $B\hat{A}C = 70^{\circ}$.

On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Soient E et F les images respectives des points C et B par la translation t.

1/ Tracer la figure.

2/ Montrer que $(BC) // (EF)$.

3/ Calculer CF.

4/ Calculer $F\hat{C}E$.

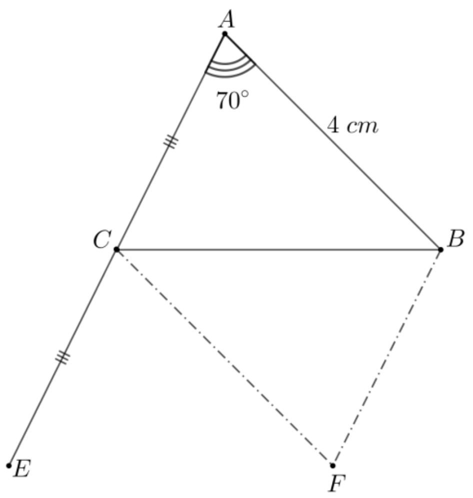
*/ Solution :

1/ La figure :

On sait que E et F les images respectives des points C et B par la translation t.

Donc : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE}$ signifie que C est le milieu du segment $[AE]$.

Et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$ signifie que $ACFB$ est un parallélogramme.



2/ Montrons que $(BC)//(EF)$:

On sait que : E est l'image du point C par la translation t

Et F est l'image du point B par la translation t

Donc : La droite (EF) est l'image de la droite (CB) par la translation t.

D'où : $(BC)//(EF)$.

3/ Calculons CF :

On sait que t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Donc : C est l'image de A par la translation t.

Et puisque : F est l'image du point B par la translation t

Alors : Le segment $[CF]$ est l'image du segment $[AB]$ par la translation t.

D'où : $CF = AB$.

Et puisque : $AB = 4\,cm$, alors : $\boxed{CF = 4\,cm}$.

4/ Calculons $F\hat{C}E$:

On sait que : F, C et E sont les images respectives des points B, A et C par t.

Donc : L'angle $F\hat{C}E$ est l'image de l'angle $B\hat{A}C$ par t.

D'où : $F\hat{C}E = B\hat{A}C$.

Et puisque : $B\hat{A}C = 70^\circ$, alors : $\boxed{F\hat{C}E = 70^\circ}$