Systèmes d'équations

3ASC

Mathématiques

I_ Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

1/ Définition :

Soient $a\,,b\,,c\,,a'\,,b'\;et\;c'$ des nombres réels donnés et $x\;et\;y$ deux nombres réels inconnus.
On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues,
toute écriture de la forme : $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

2/ Exemples :

On considère les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ -3x-4y=-2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x-3y=\frac{2}{3} \\ -3x+y+2=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{x+2y}{2}-1=0 \\ 3x+y=-4 \end{cases}$$

3/ Résolution algébrique d'un système de deux équations à deux inconnues :

a)_ Définition :

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues $x\;\;et\;y$,c'est trouver tous les couples $(x\,;y)$, s'ils existent pour lesquels les deux équations soient vraies simultanément.

b)_ Méthodes de résolution d'un système :

b_1)_ Méthode par substitution : on utilise <u>de préférence</u> la méthode par substitution lorsque l'une des deux inconnues a pour coefficient $1\;\;ou\;\;-1$.

**/ Exemple :

Ici, y a pour coefficient -1

Résolvons le système : $\begin{cases} (1)\;\; 3x-y=1 \\ (2)\;\; 2x+3y=19 \end{cases}$

✲Exprimons y en fonction de x dans l'équation (1) :

On a : $3x-y=1$ signifie que : $-y=1-3x$

D'où : (3) $y=-1+3x$

✻Substituons y par $-1+3x$ dans l'équation (2), puis calculons x :

On a : $2x+3y=19$ signifie que : $2x+3(-1+3x)=19$

$$2x-3+9x=19$$
$$11x=19+3$$
$$11x=22$$
$$x=\frac{22}{11}$$
$$x=2$$

✻Remplaçons x par 2 dans l'équation (3), puis calculons y :

On a : $y=-1+3x$ signifie que : $y=-1+3\times 2$

$$y=-1+6$$
$$y=5$$

Donc : le système a pour unique solution le couple $(2\,;5)$

b_2) _ Méthode par combinaison linéaire : on utilise <u>de préférence</u> la méthode de Combinaison linéaire dans les autres cas.

**/ Exemple :

Résolvons le système : $\begin{cases} -5x+4y=-1 & (1) \\ 3x-2y=1 & (2) \end{cases}$

Ici, aucun coefficient n'est égal à 1 ou -1

✻On multiplie les membres de l'équation (2) par 2 :

$$\begin{cases} -5x+4y=-1 & (1) \\ 6x-4y=2 & (3) \end{cases}$$

✻On ajoute membre à membre les équations (1) et (3) :

$$-5x+4y+6x-4y=-1+2$$
$$x=1$$

✻On remplace x par 1 dans l'équation (3) puis on calcule y :

$\begin{cases} x=1 \\ 6\times 1-4y=2 \end{cases}$ signifie que : $\begin{cases} x=1 \\ -4y=2-6 \end{cases}$

C'est-à-dire : $\begin{cases} x=1 \\ -4y=-4 \end{cases}$, par suite : $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{-4}{4}=-1 \end{cases}$

D'où : le système a pour unique solution le couple $(1;-1)$.

4/ Résolution graphique d'un système de deux équations à deux inconnues :

a)_ Exemple 1 :

Résolvons le système : $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$.

On considère les droites (D) *et* (Δ) telles que :

$$(D) : 2x+y-1=0 \quad et \quad (\Delta) : 4x+2y=2$$

Cherchons les équations réduites des droites (D) *et* (Δ) :

On a :

$$\begin{cases} y=-2x+1 \\ 2y=-4x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=\dfrac{-4x}{2}+\dfrac{2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=-2x+1 \end{cases}$$

On remarque que les deux droites (D) *et* (Δ) ont la même équation réduite.

Donc : (D) *et* (Δ) sont deux droites confondues .

D'où : Une infinité de couples $(x\,;y)$ sont solutions de ce système.

b)_ Exemple 2 :

Résolvons le système : $\begin{cases} 3x+y-5=0 \\ 6x+2y+1=0 \end{cases}$.

On considère les droites (D) *et* (Δ) telles que :

$$(D) : 3x+y-5=0 \quad et \quad (\Delta) : 6x+2y+1=0$$

Cherchons les équations réduites des droites (D) *et* (Δ) :

On a :

$$\begin{cases} y=-3x+5 \\ 2y=-6x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-3x+5 \\ y=\dfrac{-6x}{2}-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-3x+5 \\ y=-3x-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

0000003

On remarque que les deux droites (D) *et* (Δ) ont le même coefficient directeur.

Donc : (D) *et* (Δ) sont strictement parallèles.

D'où : Ce système n'admet pas de solution.

c)_ Exemple 3 :

Résolvons le système : $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ -3x+y+2=0 \end{cases}$.

On considère les droites (D) *et* (Δ) telles que :

$$(D) : 2x-y-1=0 \quad et \quad (\Delta) : -3x+y+2=0$$

Cherchons les équations réduites des droites (D) *et* (Δ) :

On a :

$$\begin{cases} -y=-2x+1 \\ y=3x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=3x-2 \end{cases}$$

On remarque que les deux droites (D) *et* (Δ) n'ont pas le même coefficient directeur.

Donc : (D) *et* (Δ) sont deux droites sécantes .

Soit M le point de rencontre des droites (D) *et* (Δ).

Construisons les droites (D) *et* (Δ) dans le plans rapporté à un repère orthonormé $(O;I;J)$, puis déterminons les coordonnées du point M .

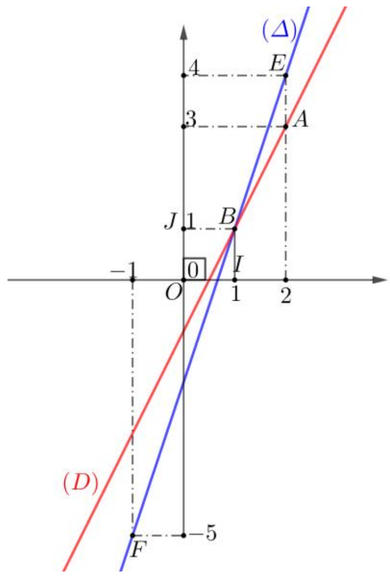
On considère les tableaux de valeurs suivants :

(D)	x	y	$M(x;y)$
A	2	3	$A(2;3)$
B	1	1	$B(1;1)$

Donc : $(D)=(AB)$

(Δ)	x	y	$M(x;y)$
E	2	4	$E(2;4)$
F	-1	-5	$F(-1;-5)$

Donc : $(\Delta)=(EF)$



0000004

On remarque que les droites (D) et (Δ) se coupent en $B(1;1)$

Donc : $M = B$ signifie que : $M(1;1)$.

D'où : le système a pour unique solution le couple $(1;1)$.

II_ Résolution de problèmes :

1/ Règle :

La résolution d'un problème se déroule en 4 étapes :

1/ Choisir des inconnues.

2/ Mise en système d'équations.

3/ Résolution du système.

4/Retour au problème.

2/ Exemples :

Une usine fabrique deux sortes d'objets : A et B.
L'objet A nécessite 2 kg d'acier et 3 heures de fabrication.
L'objet B nécessité 4 kg d'acier et 2 heures de fabrication.
Combien d'objets de chaque sorte a-t-on fabriqué en 67 heures de travail et en utilisant 80 kg d'acier ?

1/ Choix des inconnues :

Soient x le nombre d'objets A, et y le nombre d'objets B.

2/ Mise en système d'équations :

Puisque l'objet A nécessite 2,4 kg d'acier et que l'objet B nécessite 4 kg d'acier alors : l'ensemble d'objets fabriqués utilisant 80 kg d'acier est : $2,4x + 4y = 80$.

Et puisque l'objet A nécessite 3h de fabrication et que l'objet B nécessite 2h de fabrication alors : l'ensemble d'objets fabriqués en 67h est : $3x + 2y = 67$

D'où : le système à résoudre est : $\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} 2,4x + 4y = 80 \\ 3x + 2y = 67 \end{cases}$

3/ Résolution du système :

On multiplie les membres de l'équation (1) par -2 :

$$\begin{array}{l} (1) \\ (3) \end{array}\begin{cases} 2,4x + 4y = 80 \\ -6x - 4y = -134 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre les équations (1) et (3) , puis on calcule x :

$$\begin{cases} 2,4x+4y=80 \\ 2,4x+4y-6x-4y=80-134 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,4x+4y=80 \\ -3,6x=-54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,4x+4y=80 \\ x=\dfrac{-54}{-3,6}=\dfrac{540}{36}=15 \end{cases}$$

On remplace x par 15, puis on calcule y :

$$\begin{cases} 2,4x+4y=80 \\ x=\dfrac{-54}{-3,6}=\dfrac{540}{36}=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,4\times 15+4y=80 \\ x=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36+4y=80 \\ x=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y=80-36 \\ x=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y=44 \\ x=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\dfrac{44}{11}=11 \\ x=15 \end{cases}$$

D'où : le système admet pour unique solution le couple : $(15\,;11)$.

4/ Retour au problème :

*/ Le nombre d'objets A fabriqués : est 15 objets.
*/ Le nombre d'objets B fabriqués : est 11 objets.