Maths facile
Prof: abdelmalek

Repère dans le plan

3ASC

Mathématiques

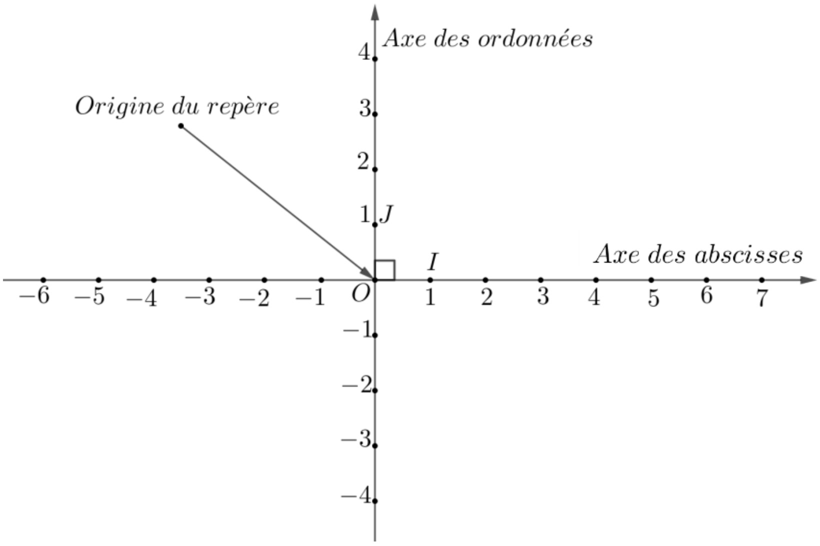
المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
لتكوين المهني

Académie Régionale d'Education et de Formation
Région de Marrakech - Safi

I_ Les cordonnées d'un point :

1/ Repère Orthonormé du Plan :

Soient (OI) et (OJ) deux droites graduées, leur unité de graduation est respectivement OI et OJ telles que : $\begin{cases} OI = OJ = 1 \\ (OI) \perp (OJ) \end{cases}$.



*/ On dit que le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;I;J)$.

*/ La droite (OI) est appelée : l'axe des abscisses.

*/ La droite (OJ) est appelée : l'axe des ordonnées.

*/ Le point O est appelé : l'origine du repère.

2/ Les coordonnées d'un point :

a)_ Définition :

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, pour tout point M il existe Un couple unique de nombre réels $(x_M ; y_M)$, appelé couple de coordonnées du point M, et on écrit : $M(x_M ; y_M)$.

*/ x_M est appelé l'abscisse de M.

*/ y_M est appelé l'ordonné de M.

*/ Remarque importante :

Si le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;I;J)$, alors :

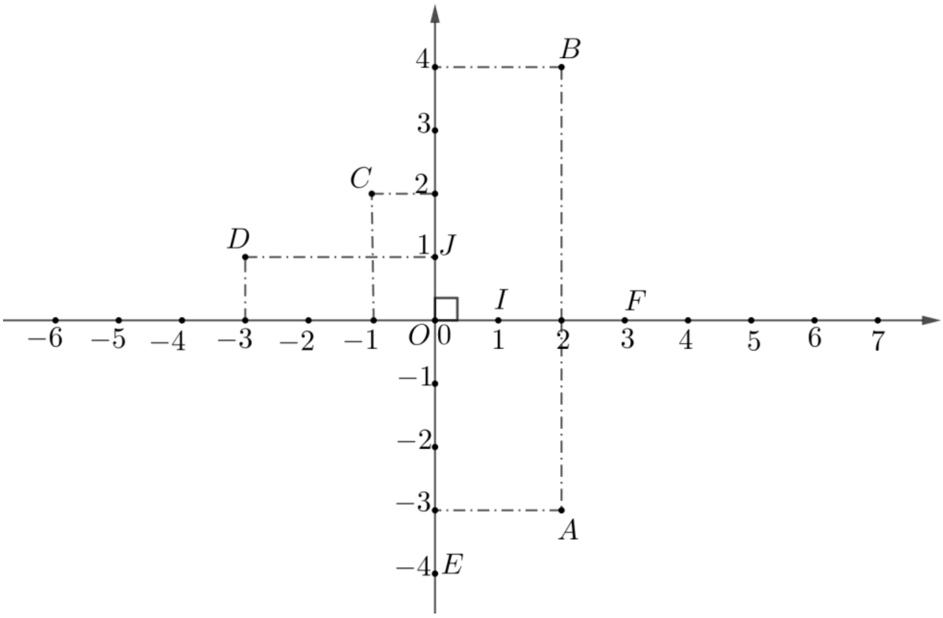
$$O(0;0) \quad ; \quad I(1;0) \quad ; \quad J(0;1)$$

b)_ Exemple :

On considère que le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;I;J)$.

Plaçons les points :

$$A(2;-3) \;\; ; \;\; B(2;4) \;\; ; \;\; C(-1;2) \;\; ; \;\; D(-3;1) \;\; ; \;\; E(0;-4) \;\; ; \;\; F(3;0)$$



3/ Les coordonnées du milieu d'un segment :

a)_ Définition :

Soient A et B deux points distincts du plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;I;J)$.

Les coordonnées du point M milieux du segment $[AB]$ sont :

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$. On écrit : $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

b)_ Exemple :

Soient $A(-2;6)$, $B(4;-8)$ et E trois point du plan rapporté à un repère Orthonormé tels que E est le milieu du segment $[AB]$.

Déterminons les coordonnées du point E.

On a : $\begin{cases} x_E = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_E = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{6-8}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$. D'où : $\boxed{E(1;-1)}$

*/ Exercice d'application :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{M}$, on considère les points $A(2;-4)$; $B(3;1)$ et $C(-2;-2)$.

1/ Déterminer le couple des coordonnées du point E le milieu du segment $[AB]$.

2/ Montrer (ou vérifier) que le point $F(0;-1)$ est le milieu du segment $[AC]$.

*/ Solution :

1/ Déterminons le couple des coordonnées du point E :

On a : E le milieu du segment $[AB]$ signifie que :

$$\begin{cases} x_E = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2} \\ y_E = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-4+1}{2} = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

D'où : $\boxed{E\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{-3}{2}\right)}$.

2/ Montrons (ou vérifions) que $F(0;-1)$ est le milieu du segment $[AC]$.

On a :

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2-2}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Et puisque : $\begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = -1 \end{cases}$, alors : $\begin{cases} x_F = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_F = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases}$

D'où : $F(0;-1)$ est le milieu du segment $[AC]$.

II_ Les cordonnées d'un vecteur :

1/ Définition :

A et B deux points distincts du plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{M}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$.

On écrit : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

*/ Exercice d'application :

Soient $A(2;3)$; $B(-1;-4)$ *et* $C(3;2)$ trois points du plan rapporté à un repère orthonormé $(O;I;J)$.

1/ Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2/ Montrer que : $\overrightarrow{AC}(1;-1)$.

3/ Déterminer les coordonnées du point E sachant que $\overrightarrow{AE}(1;1)$.

*/ Solution :

1/ Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a : $\begin{cases} x_B - x_A = -1-2 = -3 \\ y_B - y_A = -3-4 = -7 \end{cases}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AB}(-3;-7)}$.

2/ Montrons que : $\overrightarrow{AC}(1;-1)$.

On a : $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A ; y_C - y_A)$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AC}(3-2;2-3)$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AC}(1;-1)}$.

3/ Déterminons les coordonnées du point E tel que : $\overrightarrow{AE}(1;1)$.

On a : $\overrightarrow{AE}(1;1)$ signifie que : $\begin{cases} x_E - x_A = 1 \\ y_E - y_A = 1 \end{cases}$

C'est-à-dire : $\begin{cases} x_E - 2 = 1 \\ y_E - 3 = 1 \end{cases}$

Signifie que : $\begin{cases} x_E = 1+2 \\ y_E = 1+3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_E = 3 \\ y_E = 4 \end{cases}$

D'où : $\boxed{E(3;4)}$.

2/ Egalité de deux vecteurs :

a)_ propriété :

$\overrightarrow{AB}(a;b)$ *et* $\overrightarrow{CD}(c;d)$ deux vecteurs non nuls.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalent à $a = c$ *et* $b = d$.

b)_ Exemple :

Soient $A(2;3)$; $B(-2;4)$; $C(-1;2)$ *et* $D(3;1)$ des points du plan rapporté à un repère orthonormé.

Comparons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{DC}$:

On a : $$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A) \\ \overrightarrow{DC}(x_C - x_D ; y_C - y_D) \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(-2-2;4-1) \\ \overrightarrow{DC}(-1-3;1+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(-4;3) \\ \overrightarrow{DC}(-4;3) \end{cases}$$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$.

*/ Exercice d'application :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

$A(2;-2)$; $B(4;-1)$; $C(-6;-2)$ *et* D

Déterminer le couple des coordonnées du point D tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

*/ Solution :

Déterminons le couple des coordonnées du point D.

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que : $\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} 4-2 = x_D + 6 \\ -1+2 = y_D + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = x_D + 6 \\ 1 = y_D + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-6 = x_D \\ 1-2 = y_D \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 = x_D \\ -1 = y_D \end{cases}$$

D'où : $\boxed{D(-4;-1)}$.

3/ Les coordonnées de la somme de deux vecteurs :

a)_ Propriété :

Si $\overline{A}\ \overline{B} = \overline{C}\ \overline{D}$ sont deux vecteurs, alors :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\left(a+c\,;b+d\right)$$

b)_ Exemple :

Soient $\overrightarrow{AB}(-1;2)$ *et* $\overrightarrow{EF}(4;3)$ deux vecteurs.

Cherchons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}$:

On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}(-1+4\,;2+3)$.

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}(3;5)}$

4/ Les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel :

a)_ Propriété :

Si $\overrightarrow{AB}(a\,;b)$ est un vecteur et k un nombre réel, alors :

$$k\times\overrightarrow{AB}(k\times a\,;k\times b)$$

b)_ Exemple :

Soit $\overrightarrow{AB}(-5\,;2)$ un vecteur.

Cherchons les coordonnées du vecteur $-3\overrightarrow{AB}$.

On a : $\overrightarrow{AB}(-5\,;2\,)$.

Donc : $-3\times\overrightarrow{AB}(-3\times(-5)\,;-3\times 2)$

D'où : $\boxed{-3\overrightarrow{AB}(15\,;-6)}$.

5/ La distance entre deux points :

a)_ Propriété (1) :

Si A *et* B sont deux points du plan rapporté à un repère orthonormé, alors :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

*/ Exemple :

Soient $A(-1;4)$ *et* $B(6\,;2)$ deux points du plan rapporté à un repère orthonormé.

On a : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_B)^2}$

C'est-à-dire : $AB=\sqrt{(6+1)^2+(2-4)^2}$

$AB=\sqrt{7^2+(-2)^2}$

$AB=\sqrt{49+4}$

D'où : $\boxed{AB=\sqrt{53}}$

b)_ Propriété (2) :

Si $\overrightarrow{AB}(a;b)$ est un vecteur du plan rapporté à un repère orthonormé, alors :

$$AB=\sqrt{a^2+b^2}$$

*/ Exemple :

Soient $\overrightarrow{AB}(-1;4)$ un vecteur.

On a : $AB=\sqrt{(-1)^2+4^2}$

Donc : $AB=\sqrt{1+16}$

D'où : $\boxed{AB=\sqrt{17}}$

*/ Exercice d'application :

Soient $\overrightarrow{AB}(3;4)$ un vecteur, $E(3;1)$ *et* $F(0;-2)$ deux points.

Calculer AB puis EF .

*/ Solution :

*/ Calculons AB :

On a : $AB=\sqrt{3^2+4^2}$

$=\sqrt{9+16}$

$=\sqrt{25}$

D'où : $\boxed{AB=5}$.

*/ Calculons EF :

On a : $EF=\sqrt{(x_F-x_E)^2+(y_F-y_E)^2}$

C'est-à-dire : $EF=\sqrt{(0-3)^2+(-2-1)^2}$

$=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{9+9}$

$=\sqrt{18}$

D'où : $\boxed{EF=3\sqrt{2}}$