beIN school	**Les puissances**	
	3ASC	
	Mathématiques	

I_ Puissance d'un nombre réel :

1/ Définition :

Soient a un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a}_{n\ fois}$$

*/ Remarques :

$a^0 = 1$ ($avec\ a \neq 0$) ; $a^1 = a$; $0^n = 0$ ($avec\ n \neq 0$) ; 0^0 $n'existe\ pas$

a^n se lit : a puissance n ou a exposant n.

n c'est l'exposant de a.

2/ Exemples :

$\sqrt{2}^3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$; $(-7)^5 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$

$2020^0 = 1$; $(-478,25)^0 = 1$; $0^{2020} = 0$

3/ Le signe d'une puissance :

a/ Propriété :

Soient a un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul.

*/ Si n est paire, alors a^n est toujours positif quel que soit le signe de a

*/ Si n est impaire, alors $\begin{cases} \text{Si a est positif, alors } a^n \text{ est positif} \\ \text{Si a est négatif, alors } a^n \text{ est négatif} \end{cases}$

b/ Exemples :

$\left(-\sqrt{3}\right)^{11}$ est un nombre négatif ; $\left(-2\sqrt{2}\right)$ est un nombre positif

**/ Remarques importantes :

Soient a un nombre réel non nul et n un entier naturel.

1/ Si n est paire, alors $-a^n \neq (-a)^n$ -- Exemple : $-5^2 = -25$ et $(-5)^2 = 25$

2/ Si n est impaire, alors $-a^n = (-a)^n$ -- Exemple : $-5^3 = -125$ et $(-5)^3 = -125$

**/ Exercice d'application :

Calculer :

$$a=(-4)^3 \quad ; \quad b=-2^4 \quad ; \quad c=\left(-\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2$$

$$d=-\left(\frac{-2}{3}\right)^3 ; \quad e=\left(-\sqrt{5}\right)^2 \quad ; \quad f=\left(\frac{-4}{3}\right)^2+\left(\frac{-1}{3}\right)^3$$

**/ Solution :

$$a=(-4)^3 = -4\times4\times4 = -64 \quad ; \quad b=-2^4 = -2\times2\times2\times2 = -16 \quad ; \quad c=\left(-\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2 = \sqrt{16} = 4$$

$$d=\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{-2\times2\times2}{3\times3\times3} = \frac{-8}{27} \quad ; \quad e=\left(-\sqrt{5}\right)^2 = \sqrt{5}^2 = 5 \quad ; \quad f=\left(\frac{-4}{3}\right)^2+\left(\frac{-1}{3}\right)^3 = \frac{16}{9}+\frac{-1}{27} = \frac{48}{27}+\frac{-1}{27}=\frac{47}{27}$$

3/ Puissances à exposant négatif :

a/ Propriété :

Soient a et b deux nombres réels non nuls et n un nombre entier naturel

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

b/ Exemples :

$$\sqrt{2}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \left(\frac{-3}{\sqrt{5}}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\left(3+\sqrt{2}\right)^{-1}=\frac{1}{3+\sqrt{2}}=\frac{1\left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)}=\frac{3-\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2}=\frac{3-\sqrt{2}}{9-2}=\frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

II_ Règles de calculs sur les puissances :

1/ Produit et quotient de deux puissances d'un même nombre :

Soient a un nombre réel non nul, et soient m et n un nombre entiers relatifs.

$$a^m\times a^n=a^{m+n} \quad ; \quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

**/ Exemples :

$$\sqrt{2}^{-5}\times\sqrt{2}^{7}=\sqrt{2}^{-5+7}=\sqrt{2}^{2}=2 \quad ; \quad \sqrt{5}^{3}\times\sqrt{5}^{-2}\times\sqrt{5}^{-1}=\sqrt{5}^{3-2-1}=\sqrt{5}^{0}=1$$

$$\frac{5^8}{5^{11}}=5^{8-11}=5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125} \quad ; \quad \frac{11^4}{11^2}=11^{4-2}=11^2=121$$

2/ Produit et quotient de deux puissances de même exposant :

Soient a et b deux nombres réels non nuls, et soit n un nombre entier relatif.

$$a^n\times b^n=(a\times b)^n \quad ; \quad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

**/ Exemples :

$$\sqrt{8}^{3}\times\sqrt{2}^{3}=\left(\sqrt{8}\times\sqrt{2}\right)^{3}=\sqrt{16}^{3}=4^3=64$$

$$\frac{25^{-2}}{15^{-2}}=\left(\frac{25}{15}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{2}=\frac{9}{25}$$

3/ Puissance d'une puissance :

Soient a un nombre réel non nul, et soient m et n deux nombres entiers relatifs.

$$\left(a^m\right)^n=a^{m\times n}$$

**/ Exemples :

$$\left(\sqrt{7}^{-2}\right)^{3}=\sqrt{7}^{-6}=\frac{1}{\sqrt{7}^{6}}=\frac{1}{\sqrt{7^2\times7^2\times7^2}}=\frac{1}{7\times7\times7}=\frac{1}{343}$$

$$\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}\right)^{-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}=(-2)^4=16$$

**/ Exercice d'application :

On considère les expressions suivantes telles que : a et b sont deux nombres réels non nuls et $a\neq3$.

$$A=\frac{\left(a^{-5}\times a^{-1}\right)^{-2}\times a^2}{b^5\times\left(b\times b^2\right)^3} \quad ; \quad B=\left[1+\left(\frac{3-a}{1+a}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

1/ Montrer que $A=\left(\frac{a}{b}\right)^{14}$.

2/ Simplifier B .

**/ Solution :

1/ Montrons que $A=\left(\frac{a}{b}\right)^{14}$.

On a : $$A=\frac{\left(a^{-5}\times a^{-1}\right)^{-2}\times a^{2}}{b^{5}\times\left(b\times b^{2}\right)^{3}}$$
$$=\frac{\left(a^{-6}\right)^{-2}\times a^{2}}{b^{5}\times\left(b^{3}\right)^{3}}$$
$$=\frac{a^{12+2}}{b^{5+9}}$$
$$=\frac{a^{14}}{b^{14}}$$
$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{14}$$

2/ Simplifions B.

On a : $$B=\left[1+\left(\frac{3-a}{1+a}\right)^{-1}\right]^{-1}$$
$$=\left[1+\frac{1+a}{3-a}\right]^{-1}$$
$$=\left[\frac{3-a}{3-a}+\frac{1+a}{3-a}\right]^{-1}$$
$$=\left[\frac{3-a+1+a}{3-a}\right]^{-1}$$
$$=\left[\frac{4}{3-a}\right]^{-1}$$
$$=\frac{3-a}{4}$$

III_ Ecriture scientifique :

1/ Puissances de 10 :

a/ Propriétés :

Soit n un nombre entier naturel non nul.

$10^{n}=1\underbrace{00000..............0}_{n\ zéros}$; $10^{-n}=\underbrace{0,00000..........0}_{n\ zéros}1$

b/ Exemples :

$10^{5}=100000$; $10^{-7}=0,0000001$

$100000000=10^{8}$; $0,000000000001=10^{-12}$

2/ Ecriture scientifique :

a/ Définition :

Soient a un nombre décimal et n un nombre entier relatif non nul.

Toute écriture de la forme : $x=a\times10^{n}$ *ou* $x=-a\times10^{n}$, s'appelle écriture scientifique de x avec $1\leq a<10$

b/ Exemples :

Cherchons l'écriture scientifique des nombres suivants :

$a=3452$; $b=-0,00000234$; $c=678,25\times10^{5}$; $d=-0,000254\times10^{-9}$

$e=-24,5\times10^{-11}\times1,2\times10^{3}$; $f=-113\times10^{5}+7,2\times10^{7}$

1/ On a : $a = 3452$

Donc : $a = 3,452 \times 10^3$.

D'où : l'écriture scientifique de a est : $3,452 \times 10^3$.

2/ on a : $b = -0,00000234$

Donc : $b = -2,34 \times 10^{-6}$.

D'où : l'écriture scientifique de b est : $-2,34 \times 10^{-6}$.

3/ on a : $c = 678,25 \times 10^5$

Donc : $c = 6,7825 \times 10^2 \times 10^5$.

$= 6,7825 \times 10^7$

D'où : l'écriture scientifique de c est : $6,7825 \times 10^7$.

4/ On a : $d = -0,000254 \times 10^{-9}$

Donc : $d = -2,54 \times 10^{-4} \times 10^{-9}$.

$= -2,54 \times 10^{-13}$

D'où : l'écriture scientifique de d est : $-2,54 \times 10^{-13}$.

5/ On a : $e = -24,5 \times 10^{-11} \times 1,2 \times 10^3$

Donc : $e = -24,5 \times 1,2 \times 10^{-11} \times 10^3$.

$= -29,4 \times 10^{-8}$

$= -2,94 \times 10^1 \times 10^{-8}$

$= -2,94 \times 10^{-7}$

D'où : l'écriture scientifique de e est : $-2,94 \times 10^{-7}$.

6/ On a : $f = -113 \times 10^5 + 7,2 \times 10^7$

Donc : $f = -113 \times 10^5 + 7,2 \times 10^2 \times 10^5$.

$= -113 \times 10^5 + 720 \times 10^5$

$= (-113 + 720) \times 10^5$

$= 607 \times 10^5$

$= 6,07 \times 10^2 \times 10^5$

$= 6,07 \times 10^7$

D'où : l'écriture scientifique de f est : $6,07 \times 10^7$.