Equations et Inéquations

3ASC

Mathématiques

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

PROF ABDELMALEK

I_ Equations du premier degré à une inconnue :

1/ Définition :

Soient $a\,,b$ et x des nombres réels.

Toute égalité de la forme : $ax+b=0$ s'appelle équation du premier degré à une inconnue x .

2/ Exemples :

On considère les équations suivantes telles que x est un nombre réel.

$$2x+11=0 \quad ; \quad \sqrt{2}x-1=0 \quad ; \quad -3x+\sqrt{7}=0$$

3/ Résolution d'une équation :

a/ Définition :

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs possibles dd l'inconnue telles que l'égalité soit vraie.

Chacune de ces valeurs est appelée solution de l'équation.

b/ Résolution de l'équation $ax+b=0$:

1/ Si $a\neq 0$ et $b\neq 0$, alors : l'équation $ax+b=0$ est respectivement équivalente à :

$$ax=-b$$

$$x=\frac{-b}{a}$$

Donc : l'équation admet une solution unique $\frac{-b}{a}$.

2/ Si $a\neq 0$ et $b=0$, alors : l'équation $ax+b=0$ est respectivement équivalente à :

$$ax=0$$

$$x=\frac{0}{a}$$

$x=0$ Donc : l'équation admet une solution unique 0.

3/ Si $a=0$ et $b\neq 0$, alors : l'équation $ax+b=0$ est respectivement équivalente à :

$0x=-b$ Ce qui est impossible.

0000001

Donc cette équation n'admet pas de solution.

4/ Si $a=0$ et $b=0$, alors : l'équation $ax+b=0$ est respectivement équivalente à :

$$0x=0$$

Donc tous les nombres réels sont solutions de cette équation.

c/ Exemples :

Résoudre les équations suivantes telles x est un nombre réel .

$2x+\sqrt{3}=0$; $-3x-9=-3x+2$; $5x+6=2(x+3)$; $\frac{6x}{2}-2=3x-2$

1/ L'équation $2x+\sqrt{3}=0$ est respectivement équivalente à :

$$2x=-\sqrt{3}$$

$$x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Donc cette équation admet une solution unique $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

2/ L'équation $-3x-9=-3x+2$ est respectivement équivalente à :

$$-3x+3x=2+9$$

$$0x = 11 \quad (\textit{impossible})$$

Donc cette équation n'admet pas de solution.

3/ L'équation $5x+6=2(x+3)$ est respectivement équivalente à :

$$5x+6=2x+6$$

$$5x-2x=6-6$$

$$3x = 0$$

$$x = \frac{0}{3}$$

$$x=0$$

Donc cette équation admet une solution unique 0 .

4/ L'équation $\frac{6x}{2}-2=3x-2$ est respectivement équivalente à :

$$\frac{6x}{2}-\frac{4}{2}=\frac{6x-4}{2}$$

$$6x-4=6x-4$$

$$6x-6x=-4+4$$

$$0x = 0$$

0000002

Donc tous les nombres réels sont solutions de cette équation.

4/ Résolution de l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$:

a/ Définition :

$a\,,b\,,c\,,d$ *et* x sont des nombres réels.

Les solutions de l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$ sont les solutions des équations $ax+b=0$ *et* $cx+d=0$.

b/ Exemples :

Résoudre les équations suivantes telles x est un nombre réel .

$$(2x+1)\left(x-\sqrt{3}\right)=0 \quad ; \quad 7x\left(\sqrt{5}+x\right)=0 \quad ; \quad 4x^2-9=0 \quad ; \quad 2x(x-1)=4(x-1)$$

1/ L'équation $(2x+1)\left(x-\sqrt{3}\right)=0$ est respectivement équivalente à :

$$2x+1=0 \quad ou \quad x-\sqrt{3}=0$$
$$2x=-1 \quad ou \quad x=\sqrt{3}$$
$$x=\frac{-1}{2} \quad ou \quad x=\sqrt{3}$$

Donc cette équation admet deux solutions : $\frac{-1}{2}$ *et* $\sqrt{3}$.

2/ L'équation $7x\left(\sqrt{5}+x\right)=0$ est respectivement équivalente à :

$$7x=0 \quad ou \quad \sqrt{5}+x=0$$
$$x=\frac{0}{7} \quad ou \quad x=-\sqrt{5}$$
$$x=0 \quad ou \quad x=-\sqrt{5}$$

Donc cette équation admet deux solutions : 0 *et* $-\sqrt{5}$.

3/ L'équation $4x^2-9=0$ est respectivement équivalente à :

$$(2x)^2-3^2=0$$
$$(2x-3)(2x+3)=0$$
$$2x-3=0 \quad ou \quad 2x+3=0$$
$$2x=3 \quad ou \quad 2x=-3$$
$$x=\frac{3}{2} \quad ou \quad x=\frac{-3}{2}$$

Donc cette équation admets deux solutions : $\frac{3}{2}$ *et* $\frac{-3}{2}$.

4/ L'équation $2x(x-1)=4(x-1)$ est respectivement équivalente à :

$$2x(x-1)-4(x-1)=0$$
$$(x-1)(2x-4)=0$$
$$x-1=0 \quad ou \quad 2x-4=0$$
$$x=1 \quad ou \quad 2x=4$$
$$x=1 \quad ou \quad x=\frac{4}{2}$$
$$x=1 \quad ou \quad x=2$$

Donc cette équation admet deux solutions : 1 *et* 2

5/ Mise en équation de problèmes :

a/ Règle :

Pour résoudre un problème on suit les étapes suivantes :
1/ Choix de l'inconnue.
2/ Mise en équation.
3/ Résolution de l'équation et vérification.
4/ Retour au problème.

b/ Exemple :

La somme des âges de Aziz , de sa mère et de sa grand-mère est 90 ans.
La grand-mère a le double de l'âge de la mère et l'âge de Aziz est le tiers de celui de sa mère.

Quel est l'âge de chacune ?

Solution :

1/ Choix de l'inconnue :

Soit x l'âge de la mère.

2/ Mise en équation :

Puisque l'âge de la mère est x, alors :

L'âge de la grand-mère est $2x$ et l'âge de Aziz est $\frac{x}{3}$.

Et puisque la somme de leurs âges est 90 ans, alors l'équation est : $x+2x+\frac{x}{3}=90$

3/ Résolution de l'équation : $x+2x+\frac{x}{3}=90$

Cette équation est respectivement équivalente à :

$$\frac{3x+6x+x}{3}=\frac{270}{3}$$

$$3x+6x+x=270$$

$$10x=270$$

$$x=\frac{270}{10}$$

$$x=27$$

*/ Vérification :

$$2\times 27+27+\frac{27}{3}=54+27+9$$

$$=90$$

Donc la solution de cette équation est : 27.

4/ Retour au problème :

L'âge de la mère est : 27 ans.

L'âge la grand-mère est : $2\times 27=54$ ans.

L'âge de Aziz est : $\frac{27}{3}=9$ ans.

II_ Inéquations du premier degré à une inconnue :

1/ Définition :

Soient a , b et x des nombres réels.

Toute inégalité de la forme : $ax+b>0$ *ou* $ax+b\geq 0$ *ou* $ax+b<0$ *ou* $ax+b\leq 0$

s'appelle inéquation du premier degréà une inconnue x .

2/ Exemples :

On considère les inéquations suivantes telles que x est un nombre réel.

$$2x+\sqrt{2}\geq 0 \quad ; \quad \frac{1}{2}x-7>0 \quad ; \quad x\sqrt{3}+1\leq 0 \quad ; \quad \frac{x+4}{2}<0$$

3/ Résolution d'une inéquation :

*/ Exemple 1 :

Résolution de l'inéquation : $2x-1>0$.

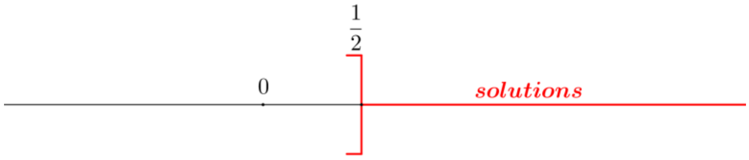
Cette inéquation est respectivement équivalente à :

$$2x > 1$$

$$x > \frac{1}{2}$$

Donc tous les nombres réels strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$ sont solutions de cette inéquation.

*/ Représentations des solutions sur une droite graduée :



*/ Exemple 2 :

Résolution de l'inéquation : $3x - 2 \geq 2x - 7$.

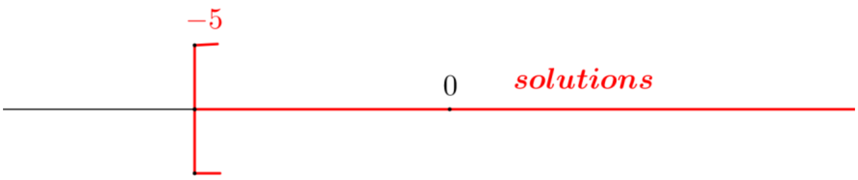
Cette inéquation est respectivement équivalente à :

$$3x - 2x \geq -7 + 2$$

$$x \geq -5$$

Donc tous les nombres réels supérieurs ou égaux à -5 sont solutions de cette inéquation.

*/ Représentations des solutions sur une droite graduée :



*/ Exemple 3 :

Résolution de l'inéquation : $x - 5 > 3x - 9$.

Cette inéquation est respectivement équivalente à :

$$x - 3x > -9 + 5$$

$$-2x > -4$$

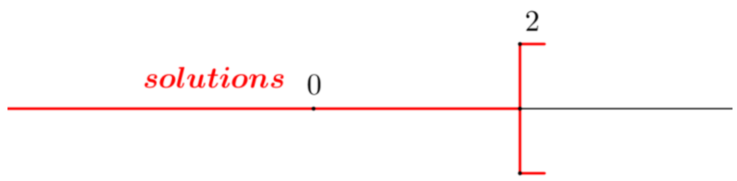
$$-x > \frac{-4}{2}$$

$$-x > -2$$

$$x < 2$$

Donc tous les nombres réels strictement inférieurs à 2 sont solutions de cette inéquation.

*/ Représentations des solutions sur une droite graduée :



*/ Exemple 4 :

Résolution de l'inéquation : $\frac{3x-5}{4} \leq -x-1$.

Cette inéquation est respectivement équivalente à :

$$\frac{3x-5}{4} \leq \frac{-4x-4}{4}$$

$$3x-5 \leq -4x-4$$

$$3x+4x \leq -4+5$$

$$7x \leq 1$$

$$x \leq \frac{1}{7}$$

Donc tous les nombres réels inférieurs ou égaux à $\frac{1}{7}$ sont solutions de cette inéquation.

*/ Représentations des solutions sur une droite graduée :