Maths facile Prof: abdelmalek	Les racines carrées 3ASC Mathématiques	bein School

I_ La racine carrée d'un nombre réel positif :

1/ Exemples :

** Le nombre réel positif dont le carré est égale à 4 est 2 .

On dit que 2 est la racine carrée de 4, notée : $\sqrt{4}$.

On écrit : $\sqrt{4}=2$. (c'est une racine carrée entière)

** Le nombre réel positif dont le carré est égale à 0,25 est $0,5$.

On dit que $0,5$ est la racine carrée de $0,25$, notée : $\sqrt{0,25}$.

On écrit : $\sqrt{0,25}=0,5$. (c'est une racine carrée décimale)

** Le nombre réel positif dont le carré est égale à $\frac{16}{49}$ est $\frac{4}{7}$.

On dit que $\frac{4}{7}$ est la racine carrée de $\frac{16}{49}$, notée : $\sqrt{\frac{16}{49}}$.

On écrit : $\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{4}{7}$. (c'est une racine carrée rationnelle)

2/ Définition :

Soit a un nombre réel positif ou nul (c'est-à-dire $a \geq 0$).

La racine carrée de a c'est le nombre réel positif dont le carré est égale à a noté $\sqrt{a}$.

** Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle : symbole radical.

3/ Remarques importantes :

** La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas . (Exemple : $\sqrt{-9}$ n'existe pas)

** La racine carrée d'un nombre positif n'est jamais négative. (Exemple : $\sqrt{25} \neq -5$)

** L'opposé de $\sqrt{a}$ (avec $a \geq 0$) est : $-\sqrt{a}$. (Exemple: L'opposé de $\sqrt{11}$ est $-\sqrt{11}$)

** $\sqrt{0}=0$; $\sqrt{1}=1$.

4/ A apprendre par cœur :

$\sqrt{1}=1$; $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{16}=4$; $\sqrt{25}=5$; $\sqrt{36}=6$; $\sqrt{49}=7$

$\sqrt{64}=8$; $\sqrt{81}=9$; $\sqrt{100}=10$; $\sqrt{121}=11$; $\sqrt{144}=12$; $\sqrt{169}=13$

$\sqrt{196}=14$; $\sqrt{225}=15$; $\sqrt{256}=16$; $\sqrt{289}=17$; $\sqrt{324}=18$; $\sqrt{361}=19$; $\sqrt{400}=20$

** Aplication :

Simplifier les nombres suivants :

$$\sqrt{144} \quad ; \quad \sqrt{\frac{1}{9}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{16}{25}} \quad ; \quad \frac{3}{\sqrt{81}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{0,36}}{0,25} \quad ; \quad \frac{\sqrt{121}}{4}$$

** Solution :

$$\sqrt{144}=12 \quad ; \quad \sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3} \quad ; \quad \sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{\sqrt{81}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \quad ; \quad \sqrt{\frac{0,36}{0,25}}=\frac{0,6}{0,5}=\frac{6}{5} \quad ; \quad \frac{\sqrt{121}}{4}=\frac{11}{4}$$

5/ Propriété : (Le carré d'une racine carrée)

Soit a un nombre réel tel que $a>0$.

$\sqrt{a^2}=\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ et $\sqrt{(-a)^2}=a$

** Exemples :

$$\sqrt{3^2}=3 \quad ; \quad \sqrt{(-11)^2}=11 \quad ; \quad \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=\frac{5}{2} \quad ; \quad \sqrt{\left(\frac{-6}{7}\right)^2}=\frac{6}{7}$$

** Remarque importante :

$\sqrt{(-7)^2}\neq\left(\sqrt{-7}\right)^2$, car : $\sqrt{(-7)^2}=7$ et $\left(\sqrt{-7}\right)^2$ n'existe pas.

6/ Résolution de l'équation $x^2=a$:

a/ Si $a>0$, alors :

L'équation $x^2=a$ est respectivement équivalente à :

$$x^2-a=0$$

$$x^2-\sqrt{a}^2=0$$

$$\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)=0$$

$$x-\sqrt{a}=0 \quad ou \quad x+\sqrt{a}=0$$

$$x=\sqrt{a} \quad ou \quad x=-\sqrt{a}$$

Donc cette équation admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

b/ Si $a=0$, alors :

L'équation $x^2=a$ est respectivement équivalente à : $x^2=0$ signifie que $x=0$.

Donc cette équation admet pour solution le nombre 0

c/ Si $a<0$, alors :

L'équation $x^2=a$ n'admet pas de solution.

** Application :

Résoudre les équations suivante telles que x est un nombre réel :

$$3x^2 = 15 \quad ; \quad 3\left(x^2+1\right) = 3 \quad ; \quad 2x^2 + 11 = 5$$

** Solutions :

1/ L'équation $3x^2 = 15$ est respectivement équivalente à :

$$x^2 = \frac{15}{3}$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{3}$$

Donc cette équation admet deux solutions : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

2/ L'équation $3\left(x^2+1\right) = 3$ est respectivement équivalente à :

$$3x^2 + 3 = 3$$

$$3x^2 = 3 - 3$$

$$3x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{3}$$

$$x^2 = 0$$

Donc la solution de cette équation est le nombre 0.

3/ L'équation $2x^2 + 11 = 5$ est respectivement équivalente à :

$$2x^2 = 5 - 11$$

$$2x^2 = -6$$

$$x^2 = \frac{-6}{2}$$

$$x^2 = -3 \ (\textit{impossible})$$

Donc cette équation n'admet pas de solution.

7/ Extraire un carré parfait :

a/ Propriété :

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls.

$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

b/ Exemples :

$$\sqrt{3^2\times 7}=3\sqrt{7} \quad ; \quad \sqrt{49\times 5}=\sqrt{7^2\times 5}=7\sqrt{5} \quad ; \quad \sqrt{2^2\times 5^2\times 3}=2\times 5\sqrt{3}=10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{7^4\times 2}=\sqrt{7^2\times 7^2\times 2}=7\times 7\sqrt{2}=49\sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{5^3}=\sqrt{5^2\times 5}=5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{3^7\times 5}=\sqrt{3^2\times 3^2\times 3^2\times 3\times 5}=3\times 3\times 3\sqrt{3\times 5}=27\sqrt{5} \quad ; \quad \sqrt{45}=\sqrt{3^2\times 5}=3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{1125}=\sqrt{3^2\times 5^2\times 5}=3\times 5\sqrt{5}=15\sqrt{5}$$

** Application :

Simplifier puis calculer :

$$a=\sqrt{\sqrt{3^4}\times 5^2\times 2^7} \quad ; \quad b=\sqrt{2^2+3^2+6^2} \quad ; \quad c=\sqrt{25}+\sqrt{81}-2\sqrt{9}$$

$$d=\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right) \quad ; \quad e=\sqrt{96}+2\sqrt{24}-3\sqrt{54}$$

** Solution :

$$\begin{aligned} a&=\sqrt{\sqrt{3}^4\times 5^2\times 2^7}\\ &=\sqrt{\sqrt{3}^2\times\sqrt{3}^2\times 5^2\times 2^2\times 2^2\times 2^2\times 2}\\ &=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 5\times 2\times 2\times 2\sqrt{2}\\ &=\sqrt{3^2}\times 40\sqrt{2}\\ &=3\times 40\sqrt{2}\\ &=120\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b&=\sqrt{2^2+3^2+6^2}\\ &=\sqrt{4+9+36}\\ &=\sqrt{49}\\ &=7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c&=\sqrt{25}+\sqrt{81}-2\sqrt{9}\\ &=5+9-2\times 3\\ &=5+9-6\\ &=8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d&=\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\\ &=\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\\ &=18-5\\ &=13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e&=\sqrt{96}+2\sqrt{24}-3\sqrt{54}\\ &=\sqrt{2^2\times 2^2\times 2\times 3}+2\sqrt{2^2\times 2\times 3}-3\sqrt{2\times 3^2\times 3}\\ &=2\times 2\sqrt{6}+2\times 2\sqrt{6}-3\times 3\sqrt{6}\\ &=4\sqrt{6}+4\sqrt{6}-9\sqrt{6}\\ &=(4+4-9)\sqrt{6}\\ &=-\sqrt{6}\end{aligned}$$

II_ Les opérations sur les racines carrées :

1/ Produit de deux racines carrées :

a/ Propriété :

Soient a et b deux nombres réels positifs.

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

b/ Exemples :

$$\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\sqrt{5\times3}=\sqrt{15} \quad ; \quad -\sqrt{7}\times\sqrt{2}=-\sqrt{7\times2}=-\sqrt{14}$$

$$\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\left(-\sqrt{10}\right)=-\sqrt{2\times5\times10}=-\sqrt{100}=-10$$

2/ Quotient de deux racines carrées :

a/ Propriété :

Soient a et b deux nombres réels tels que $a\geq0$ et $b>0$.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

b/ Exemples :

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=2 \quad ; \quad \frac{-\sqrt{75}}{\sqrt{5}}=-\sqrt{\frac{75}{5}}=-\sqrt{12}=-\sqrt{2^2\times3}=-2\sqrt{3}$$

3/ Rendre un dénominateur rationnel ou supprimer le radical au dénominateur :

a/ Propriété 1 :

Soient a et b deux nombres réels tels que $b>0$.

$$\sqrt{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{b} \quad ; \quad \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

** Exemples :

$$\sqrt{\frac{1}{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7} \quad ; \quad \frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad ; \quad \frac{3}{2\sqrt{11}}=\frac{3\sqrt{11}}{2\times11}=\frac{3\sqrt{11}}{22}$$

b/ Propriété 2 : (Expression du conjugué)

*/ Pour supprimer le radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

*/ Le conjugué de $a-b$ c'est $a+b$, et le conjugué de $a+b$ c'est $a-b$

** Exemples :

$$\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}=\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{5}^2}=\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{2-5}=\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{-3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}\left(4+\sqrt{6}\right)}{\left(4-\sqrt{6}\right)\left(4+\sqrt{6}\right)}=\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{18}}{4^2-\sqrt{6}^2}=\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{3^2\times2}}{16-6}=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{10}$$